

**Трехпараметрические многоуровневые  
квантовые системы Поллачека:  
аналитические решения для описания динамики  
В. И. Зеленков (Минск, Беларусь)**

Задача о динамике многоуровневой квантовой системы, возбуждаемой радиационным полем, сводится к решению бесконечного числа дифференциальных уравнений

$$-i \frac{da_n(t)}{dt} = f_{n+1} e^{-i\varepsilon_{n+1}t} a_{n+1}(t) + f_n e^{i\varepsilon_n t} a_{n-1}(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где  $a_n(t)$  — амплитуды вероятности,  $\varepsilon_n$  — безразмерная частотная отстройка излучения от резонанса,  $t$  — безразмерное время. Функция  $f_n$  такая, что  $f_1 \equiv 1$ , характеризует изменение дипольного момента перехода с номером уровня:  $\mu_{n-1,n} = f_n \mu_{0,1}$ .

Решение ищется в форме интегрального преобразования с использованием ортогональных полиномов:

$$a_n(t) = \int_A^B \sigma(x) \frac{p_0(x)}{d_0} \frac{p_n(x)}{d_n} \exp[it(rx + \Delta_n)] dx.$$

Здесь  $p_n(x)$  — полиномы, ортогональные на  $[A, B]$  с весом  $\sigma(x)$  и квадратичной нормой  $d_n$ , а  $\Delta_n = \Delta_0 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$ , т. е.  $\varepsilon_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$ . Выбирая полином, мы тем самым выбираем и свойства многоуровневой системы (функцию дипольных моментов, частотную отстройку от резонанса), динамика которой описывается посредством этих полиномов.

Предложенные в [1] Ф.Поллачеком трехпараметрические полиномы

$$P_n^\lambda(\cos \vartheta; \alpha, \beta) = \frac{(2\lambda)_n}{n!} e^{in\vartheta} {}_2F_1[-n, \lambda + i\tau(\vartheta; \alpha, \beta); 2\lambda; 1 - e^{-2i\vartheta}],$$

где  $\tau(\vartheta; \alpha, \beta) = (\alpha \cos \vartheta + \beta) / \sin \vartheta$ ,  $\alpha \geq |\beta| \geq 0$ ,  $\lambda > 0$ , ортогональны на интервале  $[0, \pi]$ . В частных или предельных случаях описываемые ими квантовые системы сводятся к ранее изученным системам Гегенбауэра, Поллачека–Лагерра–Мейкснера и к гармоническому осциллятору.

Ранее в [2] были получены приближенные аналитические решения для малых  $\alpha$  и  $\beta$ . В этой работе рассматриваются более общие результаты, проанализирована динамика системы и ее зависимость от параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\lambda$ .

### Литература

1. Pollaczek F. Systèmes de polynômes biorthogonaux qui généralisent les polynômes ultrasphériques. *C.R.Acad.Sci., Paris*, 1949. Vol. 228. P. 1998–2000.
2. Зеленков, В.И. Использование трехпараметрических полиномов Поллачека для описания динамики многоуровневых квантовых систем. В сб. *Труды 6-й международной конференции «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений»: в двух томах. – Т. 2. Дифференциальные уравнения.* – Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2012. С. 50–53.